ERROS

Capítulo I

Erros

Dr. André Mendes Cavalcante

Novembro de 2014

ERROS

TÓPICOS

- Introdução
- Erros na Fase de Modelagem
- Erros na Fase de Resolução

Introdução

ERROS

- A obtenção de uma solução numérica para um problema físico por meio da aplicação de métodos numéricos nem sempre fornecem valores que se encaixam dentro de limites razoáveis
- Esta diferença é chamada de “ERRO” e é inerente a processo
- O erro, em muitos casos, não pode ser evitado

ERROS

Introdução

- **O processo de solução de um problema físico por meio de métodos, numéricos pode ser representado por:**

Problema Físico $\xrightarrow{\text{Modelagem}}$ **Modelo Matemático** $\xrightarrow{\text{Resolução}}$ **Solução**

- **Modelagem** ⇒ é a fase de obtenção de um modelo matemático que descreve o comportamento do sistema em questão
- **Resolução** ⇒ é a fase de obtenção do modelo matemático através da aplicação de métodos numéricos

Introdução

ERROS

- Tipos de Erros:
  - Modelagem
  - Resolução $\begin{cases}\text{Truncamento}\\ \text{Arredondamento}\end{cases}$

ERROS

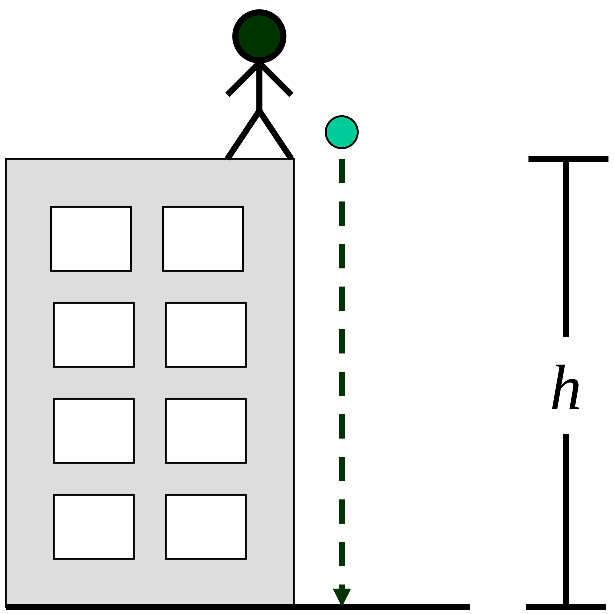
Erros na Fase de Modelagem

- Ao se tentar representar um fenômeno real por meio de um modelo matemático, raramente se tem descrição correta (exata) deste fenômeno:
- Geralmente são necessárias várias simplificações do mundo físico para que se tenha um modelo matemático em que se possa trabalhar

ERROS

Erros na Fase de Modelagem

- **<u>Exemplo</u>: Deseja determinar a altura de um prédio. Dispõem-se de uma bolinha de metal e um cronômetro.**



$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

h – altura

t – tempo

g – aceleração da gravidade

Erros na Fase de Modelagem

ERROS

- **Exemplo:**

1º Caso $\Rightarrow$ $t_1 = 3{,}0\,\text{seg}$ $\therefore$ $h_1 = 44{,}1\,\text{m}$

2º Caso $\Rightarrow$ $t_2 = 3{,}5\,\text{seg}$ $\therefore$ $h_2 = 60\,\text{m}$

Para um variação de 16,7 % no valor lido no cronômetro, a altura apresenta uma variação de 36%

Confiabilidade da Resposta $\Rightarrow$ { Modelo matemático; Precisão dos dados de entrada }

Conversão de Bases

ERROS

- **Um número na base 2 pode ser escrito como:**

$$a_m 2^m + \ldots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 + a_{-1} 2^{-1} + a_{-2} 2^{-2} + \ldots + a_n 2^n$$

ou ainda

$$\sum_{i=n}^{m} a_i 2^i$$

Onde:

a_i – é 0 ou 1

n – inteiro ≤ 0

m – inteiro ≥ 0

Conversão de Bases

ERROS

- **Exemplos**: Base 2 para Base 10

$$
\begin{aligned}
1011_2 &= 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\
&= 8 + 0 + 2 + 1 \\
&= 11_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10{,}1_2 &= 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} \\
&= 2 + 0 + 0{,}5 \\
&= 2{,}5_{10}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11{,}01_2 &= 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} \\
&= 2 + 1 + 0{,}25 \\
&= 3{,}25_{10}
\end{aligned}
$$

ERROS

Conversão de Bases

- **Transformação Base 10 para Base 2:**
  - **Parte Inteira: Método das Divisões Sucessivas**
  - **Parte Fracionária: Método das Multiplicações Sucessivas**

$$12{,}34_{10} \quad \begin{cases} \text{Parte Inteira: } & \boxed{12} \\ \text{Parte Fracionária: } & \boxed{0{,}34} \end{cases}$$

ERROS

Conversão de Bases

- **Transformação Base 10 para Base 2**

  (Parte Interia):

  - **Método da Divisão Sucessiva**

$$
\begin{array}{llllll}
N & \underline{|\;2} & & & & \\
r_1 & q_1 & \underline{|\;2} & & & \\
 & r_2 & q_2 & \underline{|\;2} & & \\
 & & r_3 & q_3 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & q_{n-1} & \underline{|\;2} \\
 & & & & r_{n-1} & 1
\end{array}
$$

$$N_{10} = \left(1 r_{n-1} \ldots r_3 r_2 r_1\right)_2$$

Conversão de Bases

ERROS

- **<u>Exemplos</u>: Base 10 para Base 2 (Parte int.)**

$$18_{10} \qquad \begin{array}{lllll} 18 & \underline{\lfloor\; 2} & & & \\ 0 & 9 & \underline{\lfloor\; 2} & & \\ & 1 & 4 & \underline{\lfloor\; 2} & \\ & & 0 & 2 & \underline{\lfloor\; 2} \\ & & & 0 & 1 \end{array}$$

$$18_{10} = 10010_2$$

$$11_{10} \qquad \begin{array}{llll} 11 & \underline{\lfloor\; 2} & & \\ 1 & 5 & \underline{\lfloor\; 2} & \\ & 1 & 2 & \underline{\lfloor\; 2} \\ & & 0 & 1 \end{array}$$

$$11_{10} = 1011_2$$

Conversão de Bases

ERROS

- <u>**Transformação Base 10 para Base 2**</u>

  (Parte Fracionária):

  - **Método da Multiplicação Sucessiva**
    - **Multiplicar o número fracionário por 2;**
    - **Desse resultado, a parte inteira será o primeiro dígito do número na base 2 e a parte fracionária é novamente multiplicada por 2;**
    - **O processo é repetido até que a parte fracionária do último produto seja igual a zero.**

ERROS

Conversão de Bases

- **Exemplos**: Base 10 para Base 2 (Parte frac.)

$0{,}1875_{10}$

$$0{,}1875.2 = 0{,}3750$$
$$0{,}3750.2 = 0{,}7500$$
$$0{,}7500.2 = 1{,}5000$$
$$0{,}5000.2 = 1{,}0000$$

$$0{,}1875_{10} = 0{,}0011_2$$

$0{,}6_{10}$

$$0{,}6.2 = 1{,}2$$
$$0{,}2.2 = 0{,}4$$
$$0{,}4.2 = 0{,}8$$
$$0{,}8.2 = 1{,}6$$
$$0{,}6.2 = 1{,}2$$

$$0{,}6_{10} = 0{,}1001\ldots_2$$

ERROS

Conversão de Bases

- **<u>Exemplos</u>: Base 10 para Base 2 (int.+frac.)**

$$13{,}25_{10} = 13_{10} + 0{,}25_{10}$$

Parte Inteira:

$$\begin{array}{llll} 13 & \underline{|\ 2} & & \\ 1 & 6 & \underline{|\ 2} & \\ & 0 & 3 & \underline{|\ 2} \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

$$13_{10} = 1101_2$$

Parte Fracionária:

$$0{,}25.2 = 0{,}50$$
$$0{,}50.2 = 1{,}00$$

$$0{,}25_{10} = 0{,}01_2$$

$$13{,}25_{10} = 1101_2 + 0{,}01_2 = 1101{,}01_2$$

Erros de Arredondamento

ERROS

- São erros provenientes da utilização de sistemas que usam uma representação finita para os números reais (calculadora, computador);
- Dado que os registradores utilizados nesses sistemas tem dimensões finitas, não se consegue representar todos os números reais possíveis;
- Para minimizar este erro, utiliza-se a precisão dupla, isto é, aumenta-se os dígitos para representação do número.

Erros de Arredondamento

ERROS

- **De uma maneira geral, um número *x* é representado na base β por:**

$$x = \pm \left[\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \ldots + \frac{d_t}{\beta^t} \right] \cdot \beta^{\exp}$$

d_i - número inteiro no intervalo $(0 \leq d_i \leq \beta - 1;$ com $i = 1, 2, \ldots, t)$

exp - representa o expoente de β $(I \leq \exp \leq S)$

I, S - limite inferior e superior, para a variação de exp

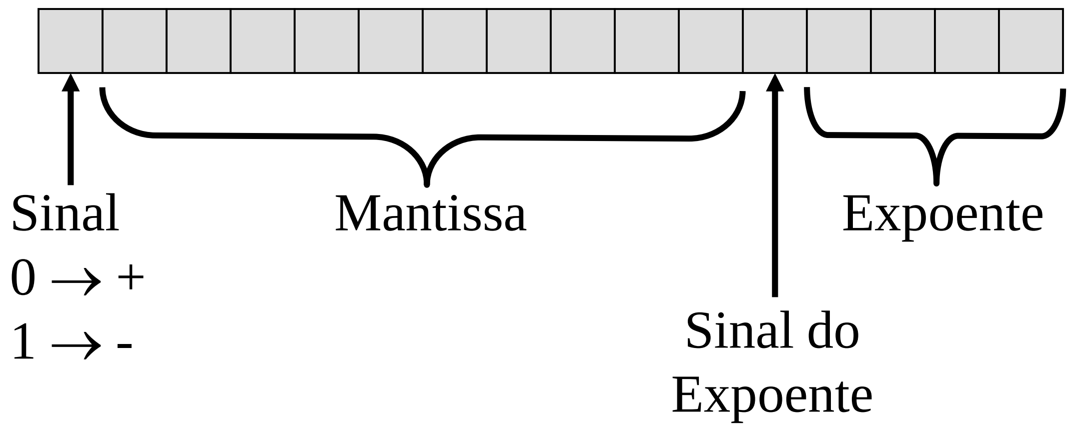
$\left[\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \frac{d_3}{\beta^3} + \ldots + \frac{d_t}{\beta^t} \right]$ - mantissa (representa os dígitos significativos do nº)

t - número de dígitos significativos do sistema de representação (precisão)

ERROS

Erros de Arredondamento

- **Exemplo de Registro de um Unidade Aritmética:**



$$\beta = 2 \text{ (Base 2)}$$

$$t = 10 \text{ (precisão da máquina)}$$

$$S = +15_{10} = +1111_2 \text{ (maior expoente)}$$

$$I = -15_{10} = -1111_2 \text{ (menor expoente)}$$

ERROS

Erros de Arredondamento

- **Exemplo: Representar 25_{10} numa máquina de calcular com o sistema de representação anterior:**

$$25_{10} = 11001_2 = 0{,}11001 \cdot 2^5 = 0{,}11001 \cdot 2^{101}$$

$$25_{10} = \left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^{10}} \right) \cdot 2^{101}$$

25_{10} →

0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

Sinal
$0 \rightarrow +$
$1 \rightarrow -$

Mantissa

Sinal do Expoente

Expoente

Erros de Truncamento

ERROS

- São erros provenientes da utilização de processos que deveriam ser infinitos ou muito grandes para a determinação de um valor e que, por razões práticas, são truncados.
- Processos infinitos são muito usados para avaliação de funções matemáticas (exponencial, logarítmicas , trigonométricas, etc...)

ERROS

Erros de Truncamento

- **<u>Exemplo</u> 1: Avaliação numérica da função sen*(x)***

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

- **<u>Exemplo</u> 2: Série de *Taylor***

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\, f^{'}(x) + \frac{(\Delta x)^2\, f^{''}(x)}{2!} + \frac{(\Delta x)^3\, f^{'''}(x)}{3!} + \ldots$$

Quando interrompe-se uma série num processo computacional ocorre o Erro de Truncamento

Propagação de Erros

ERROS

- Se refere como os erros (modelagem e e resolução) podem influenciar o desenvolvimento de um cálculo.
- **Exemplo**: Máquina de 4 dígitos significativos

$$x_1 = 0{,}3491 \cdot 10^4$$
$$x_2 = 0{,}2345 \cdot 10^0$$

$$\begin{aligned}(x_2 + x_1) - x_1 &= (0{,}2345 \cdot 10^0 + 0{,}3491 \cdot 10^4) - 0{,}3491 \cdot 10^4 \\ &= 0{,}3491 \cdot 10^4 - 0{,}3491 \cdot 10^4 \\ &= 0{,}0000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 + (x_1 - x_1) &= 0{,}2345 \cdot 10^0 + (0{,}3491 \cdot 10^4 - 0{,}3491 \cdot 10^4) \\ &= 0{,}2345 + 0{,}0000 \\ &= 0{,}2345\end{aligned}$$