Interpolação

Capítulo IV
Interpolação

Dr. André Mendes Cavalcante

Novembro de 2014

Interpolação

TÓPICOS

- Introdução
- Interpolação de Lagrange

Introdução

- **Algumas funções são conhecidas apenas em um intervalo finito [a,b], e são representadas por uma tabela, não se dispondo de sua forma analítica**

Tabela 1

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n

Interpolação

Introdução

- O dados da tabela devem levar à construção de uma função aproximada
- Muitas vezes funções apresentam formas analíticas complexas, podendo ser aproximadas por outras funções mais simples, como:
  - Logarítmica
  - Trigonométrica
  - Polinomial

Este curso apresentará apenas as funções polinomiais

Conceitos

- **Seja** $y = f(x)$ **representada na Tabela 1. Determinar** $f(x)$ **sendo:**

  a) $\bar{x} \in (x_0, x_n)$ **e** $\bar{x} \neq x_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$

  b) $\bar{x} \notin (x_0, x_n)$

Para resolver a), deve ser feita uma <u>interpolação</u>:

- **Determinar o polinômio interpolador, que é uma aproximação da função tabelada**

Para resolver b), deve ser feita uma <u>extrapolação</u>:

- **Não é objeto deste curso**

Conceitos

- **Exemplo:**

  Um censo foi realizado sendo coletados os seguintes dados para uma dada cidade:

Ano	1960	1970	1980	1990	2000
População	600.000	750.000	980.430	1.340.220	1.830.410

População para 1975 → Técnica de Interpolação

População para 2010 → Técnica de Extrapolação

Interpolação de Lagrange

- **Polinômio interpolador:**

Sendo dados (n+1) pontos, será encontrado o polinômio interpolador de ordem n.

Teorema:

Seja (x_i , y_i), i = 0, 1, 2, ..., n (n+1 pontos), $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$. Existe um único polinômio $P(x)$ de grau não maior que n, tal que $Pn(x_i) = y_i$, para todo i.

Logo,

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Interpolação de Lagrange

- **Para os pontos (x_i, y_i), tem-se que:**

$$
\begin{gathered}
P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
\vdots \\
P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{gathered}
$$

- **Na forma Matricial:**

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_0 & x_n^2 & \cdots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

Interpolação de Lagrange

- **Na forma Vetorial:**

$$\boxed{\mathbf{X}\bar{a} = \bar{y}}$$

Onde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_n^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$$

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{Det(\mathbf{X}) = \prod_{\substack{j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Como, $\boxed{x_i \neq x_j}$ para $i \neq j$ $\Rightarrow$ $\boxed{Det(\mathbf{X}) \neq 0}$

Logo, $\boxed{P_n(x)}$ existe e é único.

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange:**

Sejam os n + 1 polinômios $p_i(x)$ de grau n:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \\
p_1(x) &= (x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \\
&\vdots \\
p_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

Na forma sintética: $$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**

Tais polinômios possuem as seguintes propriedades:

$$a)\;\; p_i(x_j) \neq 0 \qquad \forall\, j = i$$
$$b)\;\; p_i(x_j) = 0 \qquad \forall\, j \neq i$$

Tais polinômios são conhecidos como Polinômios de Lagrange

Como o polinômio interpolador $P_n(x)$ que se deseja encontrar é de ordem n e contém os pontos (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, ..., n$, pode-se escrevê-lo como uma combinação linear dos polinômios de Lagrange.

Logo, $$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \cdots + b_n p_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x)$$

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**

  - Cálculo dos coeficientes b_i's:

Para o ponto x índice i (x_i), tem-se:

$$\boxed{P_n(x_i) = b_0 p_0(x_i) + b_1 p_1(x_i) + \cdots + b_i p_i(x_i) + \cdots + b_n p_n(x_i)}$$

Considerando as propriedades dos polinômios de Lagrange, tem-se:

$$\boxed{P_n(x_i) = b_i p_i(x_i)} \Rightarrow \boxed{b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}}$$

Como $P_n(x_i) = y_i \Rightarrow \boxed{b_i = \frac{y_i}{p_i(x_i)}}$

Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**

Como $\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i(x)}$ e $\boxed{b_i = \dfrac{y_i}{p_i(x_i)}}$

Tem-se $\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{y_i}{p_i(x_i)} p_i(x)}$ ou $\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \dfrac{p_i(x)}{p_i(x_i)}}$

Como $\boxed{p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}}$$

Equação do Polinômio Interpolador de Lagrange

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo:**

Determinar:

(a) O polinômio interpolador de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo;

(b) $P(0,3)$.

i	x_i	y_i
0	0,0	0,000
1	0,2	2,008
2	0,4	4,064
3	0,5	5,125

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo**:

Solução

(a) Polinômio Interpolador:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{3} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **<u>Exemplo</u> (continuação):**

$$P_3(x) = \frac{2{,}008}{0{,}012}(x^3 - 0{,}9x^2 + 0{,}2x) + \frac{4{,}064}{(-0{,}008)}(x^3 - 0{,}7x^2 + 0{,}1x)$$
$$\frac{5{,}125}{0{,}015}(x^3 - 0{,}6x^2 + 0{,}08x)$$

Resultando em: $\boxed{P_3(x) = x^3 + 10x}$

(b) $P(0{,}3)$:

Tem-se $P_3(0{,}3) = (0{,}3)^3 + 10(0{,}3)$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_3(0{,}3) = 3{,}027}$

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Erro de Truncagem (Interpolação de Lagrange):**

$$\boxed{E_T(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})} \quad \text{com} \quad \boxed{\bar{x} \in (x_0, x_n)}$$

ou

$$\boxed{E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n).A}$$

Constante a ser determinada, a qual depende da função a ser analisada.

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Erro de Truncagem (Interpolação de Lagrange):**

Pode-se demonstrar através do Teorema de Rolle, que:

$$A = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$ onde $\varepsilon \in (x_0, x_n)$

Logo:

Interpolação de Lagrange

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)\ldots(\bar{x} - x_n).\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo:**

A função $y = f(x)$ passa pelos pontos registrados na tabala abaixo. Determine:

(a) O valor aproximado de $f(0{,}32)$ usando o polinômio interpolador de 2º grau, ou seja, calcular $P_2(0{,}32)$;

(b) Calcular o erro para $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.

x	0,000	0,100	0,300	0,400
y	1,000	0,761	0,067	-0,376

andre.cavalcante@indt.org.br

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo:**

Solução

Usando-se os três últimos valores tabelados para a montagem do polinômio, tem-se

$$x_0 = 0{,}100 \rightarrow y_0 = +0{,}761$$
$$x_1 = 0{,}300 \rightarrow y_1 = +0{,}067$$
$$x_2 = 0{,}400 \rightarrow y_2 = -0{,}376$$

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo:**

Solução

(a) Polinômio Interpolador:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo (continuação):**

$$P_2(x) = +0{,}761\frac{(x-0{,}3)(x-0{,}4)}{(0{,}1-0{,}3)(0{,}1-0{,}4)} + 0{,}067\frac{(x-0{,}1)(x-0{,}4)}{(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}4)}$$
$$-0{,}376\frac{(x-0{,}1)(x-0{,}3)}{(0{,}4-0{,}1)(0{,}4-0{,}3)}$$

Resultando em:

$$\boxed{P_2(x) = 1{,}012 - 2{,}19x - 3{,}2x^2}$$

Logo: $P_2(x) = 1{,}012 - 2{,}19(0{,}32) - 3{,}2(0{,}32)^2$

$$\boxed{P_2(0{,}32) = -0{,}01648}$$

Interpolação de Lagrange

- **<u>Exemplo</u> (continuação):**

(b) Erro de Truncagem: $E_T(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

Logo:

$$E_T(0{,}32) = f(0{,}32) - P_2(0{,}32) = (-0{,}016832) - (-0{,}01648)$$

$$E_T(0{,}32) = -3{,}52.10^{-4}$$

Interpolação

Interpolação de Lagrange

- **Exemplo (continuação):**

ou:
$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x}-x_0).(\bar{x}-x_1)\ldots(\bar{x}-x_n).\frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x}-x_0).(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2).\frac{f'''(\varepsilon)}{3!}$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3-4x^2-2x+1 \\ f'(x) &= 3x^2-8x-2 \\ f''(x) &= 6x-8 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

$$E_T(0{,}32) = (0{,}32-0{,}1).(0{,}32-0{,}1)(0{,}321-0{,}4).\frac{6}{6}$$

$$E_T(0{,}32) = -3{,}52.10^{-4}$$