



Capítulo IV

Interpolação

Dr. André Mendes Cavalcante

Novembro de 2014





TÓPICOS

- Introdução
- Interpolação de Lagrange



Introdução

- Algumas funções são conhecidas apenas em um intervalo finito $[a,b]$, e são representadas por uma tabela, não se dispõe de sua forma analítica

Tabela 1

| i | x_i | y_i |
|-----|-------|-------|
| 0 | x_0 | y_0 |
| 1 | x_1 | y_1 |
| 2 | x_2 | y_2 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| n | x_n | y_n |



Introdução

- O dados da tabela devem levar à construção de uma função aproximada
- Muitas vezes funções apresentam formas analíticas complexas, podendo ser aproximadas por outras funções mais simples, como:
 - Logarítmica
 - Trigonométrica
 - Polinomial

Este curso apresentará apenas as funções polinomiais





Conceitos

- Seja $y = f(x)$ representada na Tabela 1. Determinar $f(\bar{x})$ sendo:
 - $\bar{x} \in (x_0, x_n)$ e $\bar{x} \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$
 - $\bar{x} \notin (x_0, x_n)$

Para resolver a), deve ser feita uma interpolação:

- Determinar o polinômio interpolador, que é uma aproximação da função tabelada

Para resolver b), deve ser feita uma extrapolação:

- Não é objeto deste curso



Conceitos

- **Exemplo:**

Um censo foi realizado sendo coletados os seguintes dados para uma dada cidade:

| Ano | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|-----------|---------|---------|---------|-----------|-----------|
| População | 600.000 | 750.000 | 980.430 | 1.340.220 | 1.830.410 |

População para 1975 → Técnica de Interpolação

População para 2010 → Técnica de Extrapolação



Interpolação de Lagrange

- **Polinômio interpolador:**

Sendo dados $(n+1)$ pontos, será encontrado o polinômio interpolador de ordem n .

Teorema:

Seja (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ($n+1$ pontos), $x_i \neq x_j$, para $i \neq j$. Existe um único polinômio $P(x)$ de grau não maior que n , tal que $P_n(x_i) = y_i$, para todo i .

Logo,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$





Interpolação de Lagrange

- Para os pontos (x_i, y_i) , tem-se que:

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$$

$$\vdots$$

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$$

- Na forma Matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$



Interpolação de Lagrange

- Na forma Vetorial:

$$\mathbf{X}\bar{a} = \bar{y}$$

Onde:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \quad \bar{y} = [y_0 \quad y_1 \quad \cdots \quad y_n]^T$$
$$\bar{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n]^T$$

$$Det(\mathbf{X}) = \prod_{\substack{j=0 \\ i>j}}^n (x_i - x_j)$$

Como, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j \rightarrow Det(\mathbf{X}) \neq 0$

Logo, $P_n(x)$ existe e é único.





Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange:**

Sejam os $n + 1$ polinômios $p_i(x)$ de grau n :

$$p_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

$$p_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

⋮

$$p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Na forma sintética:

$$p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$



Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**

Tais polinômios possuem as seguintes propriedades:

$$a) \ p_i(x_j) \neq 0 \quad \forall j = i$$

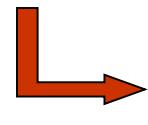
$$b) \ p_i(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i$$

Tais polinômios são conhecidos como Polinômios de Lagrange

Como o polinômio interpolador $P_n(x)$ que se deseja encontrar é de ordem n e contém os pontos (x_i, y_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, pode-se escrevê-lo como uma combinação linear dos polinômios de Lagrange.

Logo,

$$P_n(x) = b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + \cdots + b_n p_n(x)$$


$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x)$$



Interpolação de Lagrange

- **Polinômios de Lagrange (continuação):**
 - Cálculo dos coeficientes b_i 's:

Para o ponto x índice i (x_i), tem-se:

$$P_n(x_i) = b_0 p_0(x_i) + b_1 p_1(x_i) + \cdots + b_i p_i(x_i) + \cdots + b_n p_n(x_i)$$

Considerando as propriedades dos polinômios de Lagrange, tem-se:

$$P_n(x_i) = b_i p_i(x_i)$$



$$b_i = \frac{P_n(x_i)}{p_i(x_i)}$$

Como $P_n(x_i) = y_i$



$$b_i = \frac{y_i}{p_i(x_i)}$$





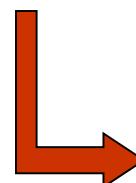
Interpolação de Lagrange

- Polinômios de Lagrange (continuação):

Como $P_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x)$ e $b_i = \frac{y_i}{p_i(x_i)}$

Tem-se $P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{p_i(x_i)} p_i(x)$ ou $P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$

Como $p_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$



$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Equação do Polinômio
Interpolador de Lagrange



Interpolação de Lagrange

- **Exemplo:**

Determinar:

- O polinômio interpolador de Lagrange para a função conhecida pelos pontos tabelados abaixo;
- $P(0,3)$.

| i | x_i | y_i |
|-----|-------|-------|
| 0 | 0,0 | 0,000 |
| 1 | 0,2 | 2,008 |
| 2 | 0,4 | 4,064 |
| 3 | 0,5 | 5,125 |



Interpolação de Lagrange

- Exemplo:

Solução

(a) Polinômio Interpolador:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$



Interpolação de Lagrange

- Exemplo (continuação):

$$\begin{aligned} P_3(x) = & \frac{2,008}{0,012}(x^3 - 0,9x^2 + 0,2x) + \frac{4,064}{(-0,008)}(x^3 - 0,7x^2 + 0,1x) \\ & \frac{5,125}{0,015}(x^3 - 0,6x^2 + 0,08x) \end{aligned}$$

Resultando em: $P_3(x) = x^3 + 10x$

(b) $P(0,3)$:

Tem-se $P_3(0,3) = (0,3)^3 + 10(0,3) \rightarrow P_3(0,3) = 3,027$





Interpolação de Lagrange

- Erro de Truncagem
(Interpolação de Lagrange):

$$E_T(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) \quad \text{com} \quad \bar{x} \in (x_0, x_n)$$

ou

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n).A$$

Constante a ser determinada, a qual depende da função a ser analisada.



Interpolação de Lagrange

- **Erro de Truncagem
(Interpolação de Lagrange):**

Pode-se demonstrar através do Teorema de Rolle, que:

$$A = \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!} \quad \text{onde} \quad \varepsilon \in (x_0, x_n)$$

Logo:

Interpolação de Lagrange

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n). \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$



Interpolação de Lagrange

- **Exemplo:**

A função $y = f(x)$ passa pelos pontos registrados na tabala abaixo. Determine:

- O valor aproximado de $f(0,32)$ usando o polinômio interpolador de 2º grau, ou seja, calcular $P_2(0,32)$;
- Calcular o erro para $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.

| | | | | |
|-----|-------|-------|-------|--------|
| x | 0,000 | 0,100 | 0,300 | 0,400 |
| y | 1,000 | 0,761 | 0,067 | -0,376 |



Interpolação de Lagrange

- Exemplo:

Solução

Usando-se os três últimos valores tabelados para a montagem do polinômio, tem-se

$$x_0 = 0,100$$

$$x_1 = 0,300$$

$$x_2 = 0,400$$



$$y_0 = +0,761$$



$$y_1 = +0,067$$



$$y_2 = -0,376$$





Interpolação de Lagrange

- Exemplo:

Solução

(a) Polinômio Interpolador:

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \\ y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$





Interpolação de Lagrange

- Exemplo (continuação):

$$P_2(x) = +0,761 \frac{(x-0,3)(x-0,4)}{(0,1-0,3)(0,1-0,4)} + 0,067 \frac{(x-0,1)(x-0,4)}{(0,3-0,1)(0,3-0,4)} \\ -0,376 \frac{(x-0,1)(x-0,3)}{(0,4-0,1)(0,4-0,3)}$$

Resultando em:

$$P_2(x) = 1,012 - 2,19x - 3,2x^2$$

Logo: $P_2(x) = 1,012 - 2,19(0,32) - 3,2(0,32)^2$



$$P_2(0,32) = -0,01648$$



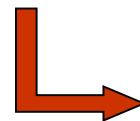
Interpolação de Lagrange

- Exemplo (continuação):

(b) Erro de Truncagem: $E_T(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})$

Logo:

$$E_T(0,32) = f(0,32) - P_2(0,32) = (-0,016832) - (-0,01648)$$



$$E_T(0,32) = -3,52 \cdot 10^{-4}$$

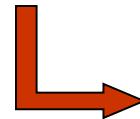


Interpolação de Lagrange

- Exemplo (continuação):

ou:

$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_n) \cdot \frac{f^{n+1}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$



$$E_T(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0).(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) \cdot \frac{f'''(\varepsilon)}{3!}$$

Tem-se que:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 2$$

$$f''(x) = 6x - 8$$

$$f'''(x) = 6$$

$$E_T(0,32) = (0,32 - 0,1).(0,32 - 0,1)(0,32 - 0,4) \cdot \frac{6}{6}$$

$$E_T(0,32) = -3,52 \cdot 10^{-4}$$