

# Ferramenta Computacional Para Análise e Soluções de Onda Plana em Meios Bianisotrópicos

André M. Cavalcante e V. Dmitriev

UFPA - Universidade Federal do Pará - Departamento de Engenharia Elétrica - Av. Augusto Corrêa nº 01- CP:8619, CEP 66075-900 Belém/PA, Brasil

**Resumo** — Tensores constitutivos de meios bianisotrópicos descritos por grupos magnéticos tem sido recentemente determinados. Alguns meios descritos por esses tensores como por exemplo, os meios chirais, meios omega, foram vastamente investigados. Entretanto, outros meios ainda precisam ser caracterizados. Neste artigo são apresentadas algumas formas de análises que podem ser aplicados em qualquer meio bianisotrópico. Estas análises são viabilizadas com o auxílio do pacote computacional *Mathematica 3.0*. Como forma de demonstração, considerou-se um meio descrito pelo grupo  $D_\infty$ . Investigou-se a propagação de ondas no referido meio. A equação da dispersão para o meio é obtida, e soluções desta equação são achadas e discutidas.

**Palavras-Chaves** — propagação de ondas eletromagnéticas; meios bianisotrópicos; teoria de grupos; software

## I. INTRODUÇÃO

Recentemente o interesse nos efeitos resultantes da interação de campos eletromagnéticos com materiais bianisotrópicos vêm aumentando, devido às potencialidades de aplicações de dispositivos recíprocos e não recíprocos compostos por meios bianisotrópicos, em uma vasta área de aplicações em óptica integrada, ondas milimétricas e microondas. Novos materiais vêm sendo estudados e propostos para o projeto de dispositivos, o que vêm atraindo a atenção de cientistas e pesquisadores de mundo inteiro, resultando em uma vasta publicação sobre o assunto.

Materiais artificiais, tais como ferritas, dielétricos e semicondutores são largamente utilizados em muitos dispositivos e componentes. Novos compostos materiais têm sido analisados nos últimos 10 anos, como exemplo, os meios chirais, meio-omega [1]-[4], meios Kamenetskii com ressonadores de ferrita [4], meios moleculares artificiais Ziolkowski [5], dentre outros. Os recentes avanços tecnológicos em técnicas de síntese de materiais, tais como *carbon nanotubes* [6], apontam na direção de que em breve poderão ser fabricados materiais artificiais. com diferentes parâmetros tensoriais.

A simetria geométrica e temporal de um meio têm um importante fator no entendimento do seu comportamento eletromagnético. A simetria do meio define as suas propriedades ( possíveis efeitos físicos ) e as suas aplicações

André M. Cavalcante, amc@supridad.com.br, V. Dimitriev, victor@ufpa.br, Tel +55-091-2111634.

Este trabalho foi financiado pelo CNPq, através do Projeto Desenvolvimento de Programas para Análise de Dispositivos e Sistemas para Redes de Comunicações Ópticas e Móveis

práticas. Particularmente, a denominação dos meios bianisotrópicos simétricos foi definida e os tensores constitutivos correspondentes foram calculados em [7]-[9]. Um caso especial de autosoluções para meios bianisotrópicos foi analisado em [10]. Condições dos parâmetros tensoriais para meios bianisotrópicos sem-perdas foram analisados em [11]. Entretanto, muitos problemas neste campo ainda não estão solucionados, e vários novos meios ainda não foram caracterizados totalmente.

Este artigo se propõe a descrever formas analíticas para o estudo e soluções de problemas relacionados com a propagação de ondas planas em meios bianisotrópicos. O pacote computacional *Mathematica 3.0* foi utilizado para o referido fim. Como exemplo, propôs-se analisar o meio descrito pelo grupo  $D_\infty$ , no qual meios já extensivamente investigados podem ser considerados casos especiais do mesmo.

## II. TEORIA

Os materiais bianisotrópicos são caracterizados por relações constitutivas lineares que acoplam os vetores dos campos elétrico e magnético através de quatro tensores independentes:

$$\mathbf{D} = [\varepsilon] \mathbf{E} + [\xi] \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = [\zeta] \mathbf{E} + [\mu] \mathbf{H} \quad (2)$$

A equação geral da dispersão para meios bianisotrópicos é expressa por [12]:

$$D_e \cdot \mathbf{E} = [(\mathbf{p} \times \mathbf{I} + [\xi]) [\mu]^{-1} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{I} - [\zeta]) + [\varepsilon]] \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

onde  $\mathbf{p} = p\mathbf{u} = \mathbf{k} / \omega$ , o vetor unitário  $\mathbf{u}$  denota a direção de propagação,  $\mathbf{k}$  é o vetor onda,  $\omega$  é a frequência angular,  $\mathbf{I}$  é o diádico unitário.

A equação (3) é de quarta ordem e contém em geral um grande número de parâmetros, o que consequentemente torna-se difícil a obtenção de uma solução analítica para a mesma. Para se fazer uma análise qualitativa de (3), pode-se usar o pacote computacional *Mathematica 3.0*. Este pacote tem programas que permitem resolver equações algébricas analiticamente. Demonstrou-se esta possibilidade usando como exemplo um específico meio descrito pelo grupo  $D_\infty$  [9].

O grupo  $D_\infty$  é caracterizado por:

- Um eixo principal  $C_\infty$ , ao longo do eixo  $z$
- Um número infinito de eixos de segunda ordem  $C_2$  localizados no plano  $z=0$

O meio considerado é recíproco e não magnético, possuindo os seguintes tensores constitutivos:

$$[\mu] = \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \quad [\zeta] = - \begin{bmatrix} j\xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & j\xi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & j\xi_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad [\xi] = \begin{bmatrix} j\xi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & j\xi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & j\xi_{33} \end{bmatrix}$$

Este tipo de meio pode ser realizado, por exemplo, pela inserção de espiras metálicas num meio dielétrico isotrópico hospedeiro, de tal modo que, embora as posições das espiras sejam aleatoriamente distribuídas, seus eixos são paralelos ao eixo  $z$ . A Fig.1 apresenta uma forma de realização deste meio.

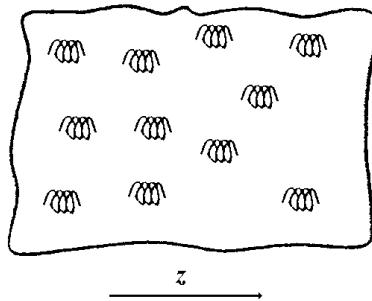


Fig.1 - Meio biamisotrópico feito com espiras paralelas ao eixo  $z$  aleatoriamente distribuídas em um meio hospedeiro.

O meio em consideração tem um eixo de simetria  $C_\infty$ , portanto, apenas um ângulo  $\theta$  entre o eixo e o vetor  $\mathbf{u}$  pode ser usado para fixar a direção de propagação. Considerando esta propriedade, o ângulo  $\phi$  representado na Fig.2 pode ser igual a zero.

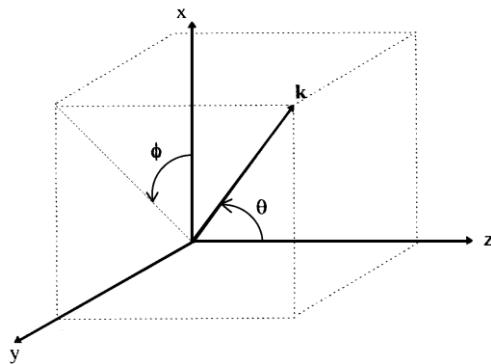


Fig. 2 - Coordenadas esféricas

### III. ANÁLISE ANALÍTICA DAS CONDIÇÕES DE PROPAGAÇÃO

Usando (3) e levando o determinante de  $D_e$  a zero, obtém-se uma equação da seguinte forma:

$$ap^4 + bp^2 + c = 0 \quad (5)$$

onde:

$$a = (B \cos^4 \theta + E \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D \sin^4 \theta)$$

$$b = -(AB \cos^2 \theta + CD \sin^2 \theta)$$

$$c = (BD^2)$$

As constantes independentes de  $\theta$  constituintes dos parâmetros acima são apresentados na Tabela I:

TABELA I CONSTANTES INDEPENDENTES DE $\theta$	
$A = 2(\epsilon_{11}\mu_{11} + \xi_{11}^2)$	$B = (\epsilon_{33}\mu_{33} - \xi_{33}^2)$
$C = (\epsilon_{33}\mu_{11} + \epsilon_{11}\mu_{33} + 2\xi_{11}\xi_{33})$	$D = (\epsilon_{11}\mu_{11} - \xi_{11}^2)$
$E = (\epsilon_{33}\mu_{11} + \epsilon_{11}\mu_{33} - 2\xi_{11}\xi_{33})$	

As soluções de (5) representam as constantes de propagação do meio (número de ondas). Observando que (5) é uma equação bi-quadrada, suas soluções podem ser expressas por:

$$k_1^\pm = \pm \omega \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (6)$$

$$k_2^\pm = \pm \omega \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (7)$$

A primeira onda caracterizada por (6) tem a constante de propagação  $k_1^+$  para a propagação direta e  $k_1^-$  para a propagação reversa. A segunda caracterizada por (7) tem a constante de propagação  $k_2^+$  para a propagação direta e  $k_2^-$  para a propagação reversa.

As constantes de propagação (6) e (7) apresentam as seguintes propriedades:

$$k_1^\pm(\theta) = k_1^\pm(-\theta) \quad (8)$$

$$k_2^\pm(\theta) = k_2^\pm(-\theta) \quad (9)$$

Estas propriedades são devidas à dependência linear das soluções com  $\sin^2(\theta)$  e  $\cos^2(\theta)$ , e é uma consequência do fato de que o vetor onda  $\mathbf{k}$  representa uma superfície de revolução em torno do eixo  $C_\infty$ .

Considerando os parâmetros tensoriais,

$$\begin{aligned}\mu_{11} &= \mu_{33} = \mu \\ \xi_{11} &= \xi_{33} = -\gamma\mu \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{33} = \varepsilon + \gamma^2\mu\end{aligned}\quad (10)$$

e substituindo (10) em (6) e (7) respectivamente, obtém-se:

$$k_1^+ = +\omega\mu\gamma + \sqrt{(\omega\mu\gamma)^2 + (\omega^2\mu\varepsilon)} \quad (11)$$

$$k_2^+ = -\omega\mu\gamma + \sqrt{(\omega\mu\gamma)^2 + (\omega^2\mu\varepsilon)} \quad (12)$$

Estas soluções representam um caso particular do meio em questão, e coincidem com o caso conhecido do meio *chiral* [13].

Analisou-se as soluções (6) e (7) para seguintes casos particulares de propagação:

- Para  $\theta = 0^\circ$ , isto é, direção ao longo do eixo óptico  $C_\infty$
- Para  $\theta = 90^\circ$ , isto é, direção perpendicular ao eixo  $C_\infty$

Obtendo-se as seguintes soluções:

Para $\theta = 0^\circ$ têm-se que:	Para $\theta = 90^\circ$ têm-se que:
$k_1^\pm = \pm\omega\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - 4D^2}}{2}}$	$k_1^\pm = \pm\omega\sqrt{\frac{C + \sqrt{C^2 - 4BD}}{2}}$
$k_2^\pm = \pm\omega\sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - 4D^2}}{2}}$	$k_2^\pm = \pm\omega\sqrt{\frac{C - \sqrt{C^2 - 4BD}}{2}}$

Para que haja propagação de uma onda em um determinado meio é necessário que suas respectivas constantes de propagação apresentem um valor finito real e diferente de zero.

Nas análises subsequentes o meio será considerado sem perdas e com as seguintes restrições aos parâmetros tensoriais:

- $\mu_{11}$ ,  $\mu_{33}$ ,  $\varepsilon_{11}$  e  $\varepsilon_{33}$  são números reais e positivos
- $\xi_{11}$  e  $\xi_{33}$  são números reais

Considerando as condições de propagação, de meio sem perdas e as restrições consideradas acima, investigou-se primeiramente seus efeitos nas soluções obtidas para os casos particulares ( $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ ).

A análise para  $\theta = 0^\circ$  mostra que para a onda com constante de propagação  $k_1$ , as relações a seguir devem ser satisfeitas

$$A^2 - 4D^2 \geq 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\text{e} \\ &A + \sqrt{A^2 - 4D^2} > 0\end{aligned} \quad (14)$$

Usando os parâmetros da Tabela I em (13) e (14), determinou-se que as seguintes relações devem ser atendidas respectivamente,

$$\varepsilon_{11}\mu_{11}\xi_{11}^2 \geq 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\text{e} \\ &\varepsilon_{11}\mu_{11} > -\xi_{11}(\xi_{11} + 2\sqrt{\varepsilon_{11}\mu_{11}})\end{aligned} \quad (16)$$

Pelas considerações feitas aos parâmetros, têm-se que (13) sempre será verdadeira visto que (15) sempre será. Já a análise de (14) mostra que ela só será verdadeira se a relação (16) for atendida. Pode-se observar que para esta direção de propagação ( $\theta = 0^\circ$ ), as constantes de propagação não dependem dos parâmetros tensoriais  $\varepsilon_{33}$ ,  $\mu_{33}$  e  $\xi_{33}$ .

A análise para  $\theta = 90^\circ$  mostra que para a onda com constante de propagação  $k_1$ , as relações a abaixo devem ser satisfeitas

$$C^2 - 4BD \geq 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\text{e} \\ &C + \sqrt{C^2 - 4BD} > 0\end{aligned} \quad (18)$$

Usando os parâmetros da Tabela I em (17) e (18), determinou-se que as seguintes relações devem ser atendidas respectivamente,

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{33}\mu_{11} + \varepsilon_{11}\mu_{33} + 2\xi_{11}\xi_{33})^2 \geq 4(\varepsilon_{33}\mu_{33} - \xi_{33}^2)(\varepsilon_{11}\mu_{11} - \xi_{11}^2) \\ &\text{e}\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_{33}\mu_{11} + \varepsilon_{11}\mu_{33} + 2\xi_{11}\xi_{33}) > - \\ &\sqrt{(\varepsilon_{33}\mu_{11} + \varepsilon_{11}\mu_{33} + 2\xi_{11}\xi_{33})^2 - 4(\varepsilon_{33}\mu_{33} - \xi_{33}^2)(\varepsilon_{11}\mu_{11} - \xi_{11}^2)}\end{aligned} \quad (20)$$

Para a análise do caso geral descrito por (6) e (7) têm-se as seguintes condições de propagação:

$$b^2 - 4ac \geq 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &\text{e} \\ &\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0\end{aligned} \quad (22)$$

Devido os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  serem formados por grandes expressões, não foi possível estabelecer de uma forma compacta nenhuma relação entre os parâmetros envolvidos, porém, esta tarefa pode ser feita através dos programas já mencionados anteriormente. Então, para a propagação de onda neste meio, (21) e (22) devem ser satisfeitas.

#### IV. ANÁLISE NUMÉRICA

Uma simples análise numérica baseada em gráficos polares foi empregada na constante de propagação do caso geral descrito por (6). A análise consistiu em verificar as variações da constante de propagação relativa  $k_1(\theta) = k_1^\pm / k_o$  ( $k_o = \omega \sqrt{\mu_o \epsilon_o}$  é a constante de propagação no espaço livre) com a variação do ângulo de propagação  $\theta$  e com o parâmetro tensorial  $\xi_{11}$ . Para a esta análise foram considerados os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= \mu_0 & \mu_{33} &= \mu_o \\ \epsilon_{11} &= 2\epsilon_0 & \epsilon_{33} &= \epsilon_o \\ \xi_{11} &= \xi_{33} / x & \xi_{33} &= \sqrt{2\mu_o \epsilon_o} \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $x$  é o variável utilizada para variar o referido parâmetro tensorial

Considerou-se quatro casos particulares para a variável  $x$ :

- 1º)  $x = 2 \Rightarrow \xi_{33} = 2\xi_{11}$
- 2º)  $x = 4 \Rightarrow \xi_{33} = 4\xi_{11}$
- 3º)  $x = 8 \Rightarrow \xi_{33} = 8\xi_{11}$
- 4º)  $x = 64 \Rightarrow \xi_{33} = 64\xi_{11}$

Os gráficos obtidos de  $k_1(\theta)$  para os referidos valores de  $x$  estão mostrados respectivamente nas Figs.3-6, onde o eixo horizontal representa o eixo óptico  $C_\infty$ :

- $\xi_{33} = 2\xi_{11}$

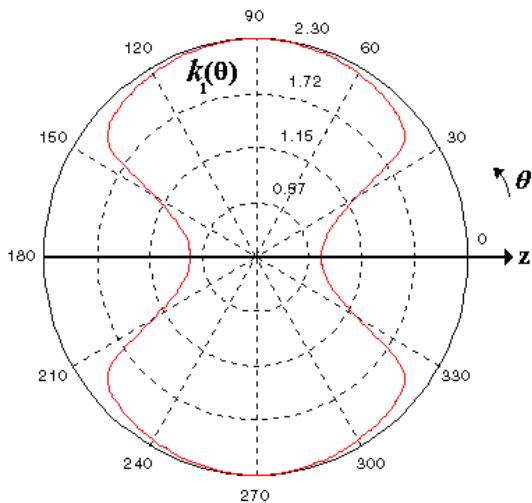


Figura 3 – Constante de propagação relativa versus  $\theta$  para parâmetros do meio (23) considerando  $x=2$ .

- $\xi_{33} = 4\xi_{11}$

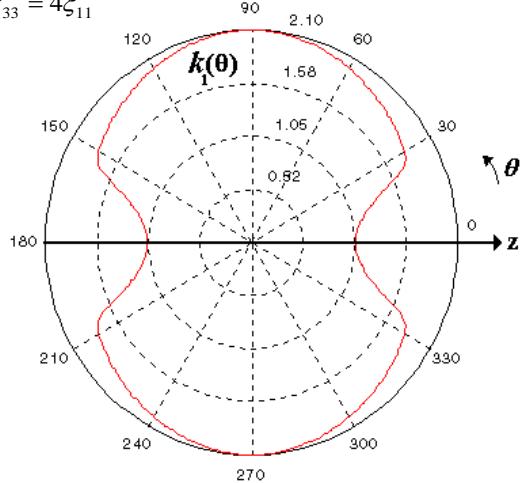


Figura 4 – Constante de propagação relativa versus  $\theta$  para parâmetros do meio (23) considerando  $x=4$ .

- $\xi_{33} = 8\xi_{11}$

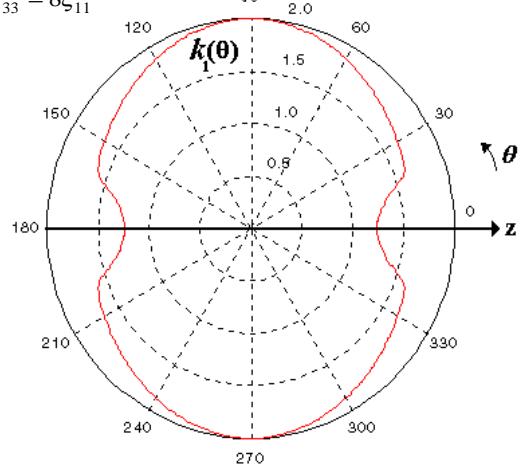


Figura 5 – Constante de propagação relativa versus  $\theta$  para parâmetros do meio (23) considerando  $x=8$ .

- $\xi_{33} = 64\xi_{11}$

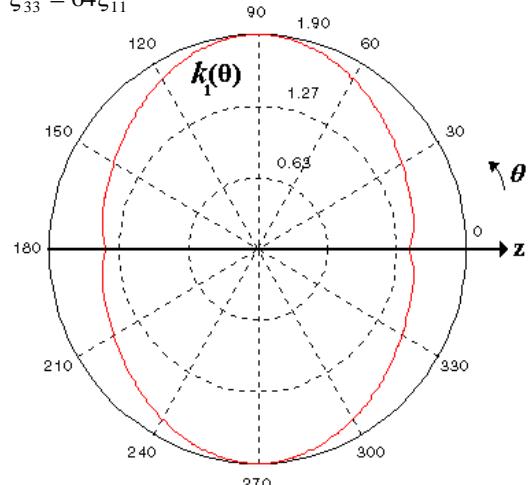


Figura 6 – Constante de propagação relativa versus  $\theta$  para parâmetros do meio (23) considerando  $x=64$ .

Pode-se observar que para grandes valores da variável  $x$ , ou seja, para valores muito pequenos do parâmetro tensorial  $\xi_{11}$ , a constante de propagação relativa  $k_1(\theta)$  tende a ter a forma de uma elipse. A Fig.7 mostra  $k_1(\theta)$  no limite, com  $x=\infty$  ( $\xi_{11}=0$ ),

- $\xi_{11} = 0$  e  $\xi_{33} = \sqrt{2\mu_o\epsilon_o}$

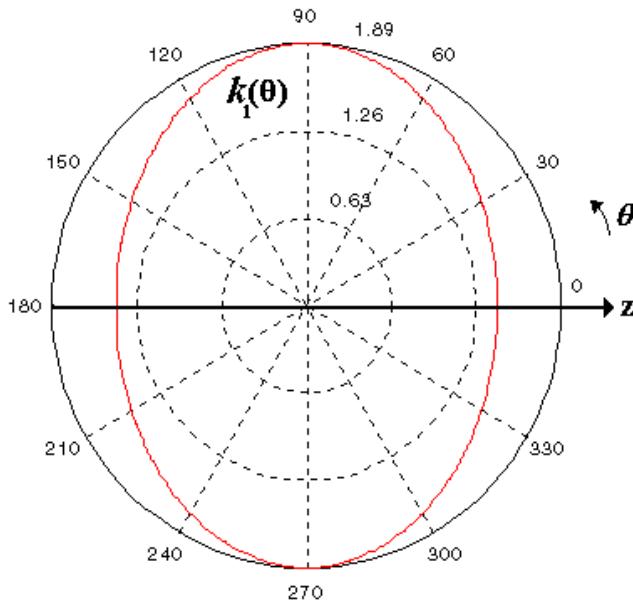


Figura 7 – Constante de propagação relativa versus  $\theta$  para parâmetros do meio (23) considerando  $x=\infty$ .

Portanto, valores pequenos de  $\xi_{11}$  implicam num aumento das constantes descritas por (6) nas direções de propagação próximas ao eixo óptico, ou seja, ângulos  $\theta$  próximos de  $0^\circ$  ou de  $180^\circ$ . Outro fator importante é observado devido (15) e (16), que mostram que as constantes de propagação para direções muito próximas de  $\theta = 0^\circ$  não dependem dos parâmetros tensoriais  $\epsilon_{33}$ ,  $\mu_{33}$  e  $\xi_{33}$ , ou seja, os mínimos de  $k_1(\theta)$  verificados nos gráficos nesta região, podem ser atribuídos aos parâmetros tensoriais  $\epsilon_{11}$ ,  $\mu_{11}$  e principalmente a  $\xi_{11}$ . Verifica-se também nos gráficos obtidos que as constantes apresentam em todos os casos valores máximos nas direções perpendiculares ao eixo óptico. Estes máximos podem ser considerados como uma contribuição dos seis parâmetros tensoriais, porém, observa-se que  $\xi_{11}$  tem pouca influência nos valores das constantes nestas direções, isto pode ser concluído visto as pequenas diferenças de valores numéricos entre os máximos dos diversos casos.

As variações  $k_1(\theta)$  com o outros parâmetros tensoriais assim como as variações da constante de propagação relativa  $k_2(\theta) = k_2^\pm / k_o$  foram verificadas e seus efeitos serão mostrados no Simpósio.

## V. CONCLUSÕES

Vários problemas nas soluções de equações de ondas planas em meios bianisotrópicos só são viabilizados com o uso de alguma ferramenta computacional. Isto é devido ao fato da grande necessidade de manipulações algébricas. Neste artigo, são propostas várias formas de análises que podem ser empregadas nas soluções de problemas de propagação de ondas planas em meios bianisotrópicos com auxílio do pacote computacional *Mathematica 3.0*. Foi proposto e analisado como demonstração um exemplo simples de um meio descrito pelo grupo  $D_\infty$ . Verificou-se que mesmo para meios com uma certa simplicidade, a análise fica inviabilizada sem o uso de alguma ferramenta computacional adequada. O pacote computacional *Mathematica 3.0* oferece grande poder de manipulações algébricas literais, o que motivou os autores a desenvolverem um *software* no referido pacote para resolver equações de dispersão.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. Ro, V.V. Varadan, V.K. Varadan, "Electromagnetic activity and absorption in microwave chiral composites", IEE Proc.-H, Vol. 139, No5, 1992, pp. 441-448.
- [2] I.V.Lindell, A.H.Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen, "Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media", Boston, MA: Artech House, 1994.
- [3] D.L. Jaggard, J.C.Liu, X.Sun, "Spherical chiroshield", Electronics letters, 1991, vol. 27, No1, pp.77-79.
- [4] E. O. Kamenetskii, "On the Technology of Making Chiral and Bianisotropic Waveguides for Microwave Propagation," Microwave Opt. Techn. Lett., Vol. 11, 1996, pp.103-107.
- [5] R. W. Ziolkowski, "The Design of Maxwellian Absorbers for Numerical Boundary Conditions and for Practical Applications Using Engineered Artificial Materials" IEEE Trans, Vol. AP-45, N4, pp. 656-671, 1997.
- [6] M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, P.C. Eklund, "Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes", Academic Press, New York, 1996.
- [7] V. Dmitriev, "Symmetry description of continuous homogeneous isotropic media under external perturbation", Electronics Letters, Vol. 34, N8, 16th April, 1998, pp.745-747.
- [8] V. Dmitriev, "Group theoretical approach to determine of the structure of complex and composite media constitutive tensors", Electronics Letters, Vol. 34, N8, 16th April, 1998, pp.743-745.
- [9] V. Dmitriev, "Constitutive tensors and general properties of complex and bianisotropic media described by continuous groups of symmetry", Electronics Letters, Vol. 34, N6, 19th March 1998, pp. 532-534.
- [10] V. Dmitriev, "Plane wave solutions for homogeneous bianisotropic media described by the magetic group  $D_{\infty h}(C_{\infty v})$ ", Microwave and Optical Technology Letters, accepted for publication.
- [11] I.V.Lindell, A.H.Sihvola, P. Puska, and L.H. Ruotanen, "Conditions for the Parameter Dyadics of Lossless Bianisotropic Media", Microwave and Optical Technology Letters, Vol.8, No.5, April 5 1995, pp.268-272.
- [12] I.V.Lindell and A.J. Viitanen, "Plane Wave Propagation in Uniaxial Bianisotropic Medium", Electronics Letters, Vol. 29, No. 2, 21st January, 1993, pp.150-152.
- [13] A. Ishimaru, "Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering", Prentice Hall, N.J., 1991.